# 利用 OALHS 构造二维均匀设计表 *

杨贵军 [1,2]　张润楚 [1]

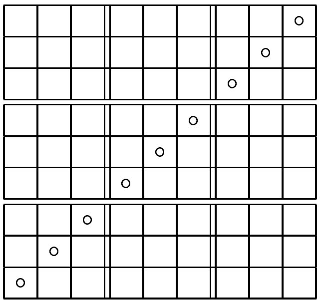
(1. 南开大学统计学系，天津 300071; 2. 天津财经学院统计学系，天津 300222)

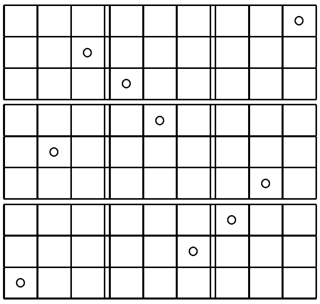
**摘　要**: 本文提出一个利用 OALHS 构造均匀设计的方法。通过对朱尧辰和 Bundschuh (1993) 计算二维偏差公式的改进，给出了在二维 OALHS 样本空间里选取均匀设计的算法。

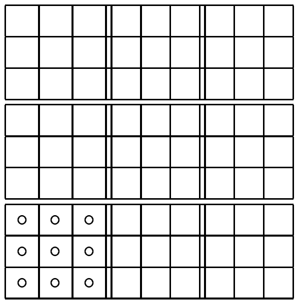
**关键词**: LHS　OALHS　均匀设计　偏差

## 1　引言

在计算机试验中，一个最重要的问题是试验点集的选取，即选取哪些点作为试验点。目前，这方面的研究成果有： Latin Hypercube 抽样 (简记 LHS) 、 OA-Latin Hypercube 抽样 (简记 OALHS) 、均匀设计和均匀设计抽样等。在 LHS 和 OALHS 的样本空间中，并不是所有样本点集分布的均匀性都很好，例如： $n = 9$, 维数为 2 时，图一给出的就是在 LHS 中均匀性很差的样本，图二给出的就是在 OALHS 中均匀性很差的样本。


图一


图二


图三

为了研究样本点集分布的均匀性，王元和方开泰 (1981) 利用数论中的一致分布理论，提出了均匀设计，同时利用生成向量表来构造均匀设计。这种方法构造的均匀设计的均匀性非常好，但不是最优的。关于均匀设计请参考方开泰 (1994) 和方开泰和马长兴 (2001) 的著作。

张润楚和王兆军 (1996) 利用均匀设计和随机平移的思想，把均匀设计发展成为均匀设计抽样，成为一种统计抽样。该抽样方法保持了所选用的均匀设计的均匀性，但样本点集分布的均匀性依赖于原来选取的均匀设计点集的均匀性。

目前，关于均匀设计的构造方法很多，但利用 OALHS 构造均匀设计的理论有待于进一步研究。 OALHS 的样本空间，由于用到了正交表的均衡可比的性质，使得它的样本点集具有分散基本均匀的优良性质。而且对于相同参数好的均匀散布点集应该在这一样本空间中，但并非所有样本点集具有同样好的均匀性。本文就是在 OALHS 样本空间中，选取散布均匀性最好的均匀设计。

*基金项目：国家自然科学基金资助项目 (10171051).

对一个有限元素集合 $\sum$, 集合中的元素个数 $S(S>2)$, 由这个集合中的元素组成的矩阵 $A_{n\times m}$, 使 $A_{n\times m}$ 的 $n\times r$ 子阵中所有可能的 $1\times r$ 行向量出现次数 $\lambda$ 相同，则称矩阵 $A_{n\times m}$ 为一个正交表，简记为 $OA(n,m,s,r)$, 其中 $\lambda$ 为指数， $n$ 为试验次数， $m$ 为变量的个数， $s$ 为水平数。为了表达方便，本文约定 $\sum$ 为 $\{0,1,2,\cdots,s-1\}$, 正交表具有一个很重要的性质是均衡可比性，把这个性质应用到 LHS 里，产生 OALHS ，得到的样本点集具有较好的散布性质。

$P_n$ 是 $n$ 个元素 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的所有排列的集合， $\rho$ 表示 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个排列变换，记为 $\{\rho(1),\rho(2),\cdots,\rho(n)\}$. 设 $\Gamma_m$ 是从 $P_n$ 中选出的且长度为 $m$ 的所有这样排列的集合。在 $\Gamma_m$ 当中的任何一个序列 $\{\rho(1),\rho(2),\cdots,\rho(n)\}$, 矩阵

$$\begin{pmatrix} \rho_1(1) & \rho_2(1) & \cdots & \rho_m(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_1(n) & \rho_2(n) & \cdots & \rho_m(n) \end{pmatrix}$$

称为一个 Latin Hypercube 样本 (简记为 LHS) 。 LHS 是 Mckay 等 (1979) 提出的，由于限制了样本点集在一维投影空间的均匀分布，使得点集在高维空间的分散程度明显改善，不会再出现如图三这样的 Monte Carlo 抽样的样本中点集聚集的情况。

但在所有的 LHS 当中，还有许多不好的样本如图一，为了使抽样的样本更好， Tang (1993) 和 Owen(1992) 引入了 OALHS 。首先，假设从 $\{1,2,\cdots,n\}$ 到 $\sum$ 的映射函数 $Z(.), q=n/s$, 定义如下：

$$Z(i)=\begin{cases} 0 & i=1,2,\cdots,q \\ \cdots & \cdots \\ s-1 & i=(s-1)q+1,(s-1)q+2,\cdots,sq \end{cases}$$

如果

$$\begin{pmatrix} Z(\rho_1(1)) & Z(\rho_2(1)) & \cdots & Z(\rho_m(1)) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Z(\rho_1(n)) & Z(\rho_2(n)) & \cdots & Z(\rho_m(n)) \end{pmatrix}$$

形成一个 $OA(n,m,s,r)$, 其中 $(\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_m)$ 由 LHS 的定义, 则称 $(\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_m)$ 是一个强度为 $r$ 的正交列。$\Gamma'_m=\{\rho\in\Gamma_m:\rho$ 是一个强度为 $r$ 的正交列 $\}$. 对任意的序列 $(\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_m)\in\Gamma'_m$, 称

$$\begin{pmatrix} \rho_1(1) & \rho_2(1) & \cdots & \rho_m(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_1(n) & \rho_2(n) & \cdots & \rho_m(n) \end{pmatrix}$$

是一个具有参数 $(n,m,s,r)$ 的 OA-Based Latin Hypercube 样本 (简记为 OALHS). $(n,m,s,r)$ 的含义同 $OA(n,m,s,r)$. 本文考虑 OALHS 的强度为 2 。由于将正交表的均衡可比思想引入到 LHS 中，得到的 OALHS , 尽管与 LHS 样本在一维空间上的投影一样，但 OALHS 样本中不会再出现象图一那样的 LHS 样本。OALHS 样本空间是 LHS 的样本空间的优良子空间。利用 OALHS , 挑选均匀设计，不仅会节省很多计算量，而且选出的设计点集会有好的均匀性。

## 2　主要结果

首先给出偏差的定义。

设 $d \geq 1, G_d = [0,1)^d$, 且 $S_d = \{u_k; k = 1, \cdots, n\}$, 是一组在 $G_d$ 上有限点列，定义 $S_d$ 的偏差为：

$$D_n(S_d) = \sup_J |\frac{A(J,n)}{n} - V(J)| \tag{1}$$

其中 $J = [0,\alpha_1) \times [0,\alpha_2) \times \cdots \times [0,\alpha_d), 0 \leq \alpha_i \leq 1, 1 \leq i \leq d, V(J) = \alpha_1 \times \alpha_2 \times \cdots \times \alpha_d$ 是 S 的体积， $A(J,n)$ 是 $u_k(1 \leq k \leq n)$ 满足 $u_k \in J$ 的个数。

从偏差的定义可以看出，偏差越小说明有限点列散布的越均匀。这个准则是王元和方开泰 (1981) 利用数论中的一致分布理论提出的，用以描述试验范围内设计点集均匀散布的一种尺度。

朱尧辰和 Bundschuh (1993) 给出了计算二维点列的偏差公式。假设 $S_2 = \{u_k = (x_k, y_k); 1 \leq k \leq n\} \subset G_2$, 满足条件 $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$, 设 $u_0 = (x_0, y_0) = (0,0)$, 且 $u_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1}) = (1,1)$. 对于每个 $l(l = 0,1,\cdots,n)$, 按照增序排列 $y_i(l = 0,1,\cdots,l,n)$, 记为 $0 \leq \xi_{l,0} \leq \xi_{l,0} \leq \cdots \leq \xi_{l,l} \leq \xi_{l,l+1} = 1$, 那么 $S_2$ 的偏差值由下列给出：

$$D_n(S_2) = \max_{0 \leq l \leq n} \max_{0 \leq k \leq l} max(|\frac{k}{n} - x_l \xi_{l,k}|, |\frac{k}{n} - x_{l+1} \xi_{l,k+1}|) \tag{2}$$

这个公式适用于任意的 2 维点列，但他们的计算量仍然很大。对于 OALHS 样本点集中的任意点 $(\rho_1(i), \cdots, \rho_m(i)), i = 1, \cdots, n$. 我们可以进行如下的变换

$$a_{ki} = \frac{2\rho_k(i) - 1}{2n}, k = 1, \cdots, m \tag{3}$$

则该样本点变换为 $G_m$ 中的点 $(a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{mi})$ 。按照同样的方式，可以把这个 OALHS 样本点集的其它点也变换为 $G_m$ 中的点。这样就可以根据一个 OALHS 得到一个 $G_m$ 中的设计。

**定理 1** 设 $S_2 = \{u_k = (x_k, y_k); 1 \leq k \leq n\} \subset G_2$, 满足条件 $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$, 且令 $x_i = \frac{i-0.5}{n}$, $u_0 = (x_0, y_0) = (0,0)$, 及 $u_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1}) = (1,1)$. 对于每个 $l(l = 0,1,\cdots,n)$, 按照增序排列 $y_i(l = 0,1,\cdots,l,n)$, 记为 $0 \leq \xi_{l,0} \leq \xi_{l,0} \leq \cdots \leq \xi_{l,l} \leq \xi_{l,l+1} = 1$, 那么

$$\max_{0 \leq l \leq n} \max_{0 \leq k \leq l} max(|\frac{k}{n} - x_l \xi_{l,k}|, |\frac{k}{n} - x_{l+1} \xi_{l,k+1}|) = \max_{1 \leq l \leq n} \max_{1 \leq k \leq l} max(|\frac{k}{n} - x_l \xi_{l,k}|, |\frac{k-1}{n} - x_{l+1} \xi_{l,k}|) \tag{4}$$

证明过程见附录。由定理 1 可知

$$D_n(S_2) = \max_{1 \leq l \leq n} \max_{1 \leq k \leq l} max(|\frac{k}{n} - x_l \xi_{l,k}|, |\frac{k-1}{n} - x_{l+1} \xi_{l,k}|) \tag{5}$$

尽管 (2) 式和 (5) 式的计算量相差不大，但前者的括号中的 $\xi_{l,k}$ 和 $\xi_{l,k+1}$ 代表的是两个不同的变量，而后者的括号只包含 $\xi_{l,k}$. 借助于这一点可以观察样本各个设计点对偏差的影响，有利于更快地找到好的设计。

对于 OALHS ，考虑 $q = s$ 的情形，设选定映射函数：

$$Z(i) = \begin{cases} 0 & i = 1, 2, \cdots, s \\ \cdots & \cdots \\ s-1 & i = (s-1)s+1, (s-1)s+2, \cdots, n \end{cases}$$

对于任意二维的 OALHS 样本 $\{u_k = (x_k, y_k), k = 1, 2, \cdots, n\}$, 则 $\{u'_k = (Z(x_k), Z(y_k)), k = 1, 2, \cdots, n\}$ 是一个二维正交表，若 $x_k(k = 1, 2, \cdots, n)$ 从小到大排列，则对于任意 $l(1 \le l \le n)$, 按增序排列 $y_k(k = 1, 2, \cdots, l)$, 表示为 $\xi_{l,1} \le \xi_{l,2} \le \cdots \le \xi_{l,l}$, 则

$$Z(\xi_{l,1}) \le Z(\xi_{l,2}) \le \cdots \le Z(\xi_{l,l}) \tag{6}$$

我们可以把上面的结果写为下面的形式：

$$\begin{aligned} Z(\xi_{l,k_0^l+1}) &= Z(\xi_{l,k_0^l+2}) = \cdots = Z(\xi_{l,k_1^l}) = 0 \\ \cdots & \quad \cdots \\ Z(\xi_{l,k_{s-1}^l+1}) &= Z(\xi_{l,k_{s-1}^l+2}) = \cdots = Z(\xi_{l,k_s^l}) = s-1 \end{aligned}$$

其中 $k_0^l = 0, k_s^l = l, \xi_{l,k_i^l+1} \le \xi_{l,k_i^l+2} \le \cdots \le \xi_{l,k_{i+1}^l}, (i = 0, 1, \cdots, s-1)$. 则

$$\begin{aligned} & \max_{1 \le l \le n} \max_{1 \le k \le l} max(|\frac{k}{n} - x_l \xi_{l,m}|, |\frac{k-1}{n} - x_{l+1} \xi_{l,m}|) \\ = & \max_{1 \le l \le n} \max_{0 \le i \le s-1} \max_{k_i^l < m \le k_{i+1}^l} max(|\frac{m}{n} - x_l \xi_{l,m}|, |\frac{m-1}{n} - x_{l+1} \xi_{l,m}|) \\ = & \max_{0 \le i \le s-1} \max_{1 \le l \le n} \max_{k_i^l < m \le k_{i+1}^l} max(|\frac{m}{n} - x_l \xi_{l,m}|, |\frac{m-1}{n} - x_{l+1} \xi_{l,m}|) \end{aligned}$$

对于不同的 $i, j, p > 0, q > 0$ 值，根据 $\xi_{l,k_j^l+p}$ 和 $\xi_{l,k_j^l+q}$ 的定义，有

$$Z(\xi_{l,k_i^l+p}) = i < Z(\xi_{l,k_j^l+q}) = j \Rightarrow \xi_{l,k_i^l+p} < \xi_{l,k_j^l+q}$$

根据上式可知，在 OALHS 样本中，满足 $Z(x) = i$ 的 $s$ 个元素的位置，在这 $s$ 个位置上的元素重排以后，其它的元素位置保持不变，则结果只改变 $Z(x) = i$ 的 $s$ 个变量的排列顺序，不会影响其它点的排列。所以，由此产生的结果是其它点在偏差公式中的值不变，而包含 $Z(x) = i$ 的自变量的部分发生了变化，所以

$$\begin{aligned} D_n(S_2) &= \max_{0 \le i \le s-1} \max_{1 \le l \le n} \max_{k_i^l < m \le k_{i+1}^l} max(|\frac{m}{n} - x_l \xi_{l,m}|, |\frac{m-1}{n} - x_{l+1} \xi_{l,m}|) \\ &= \max_{0 \le i \le s-1} d_i \end{aligned}$$

其中

$$d_i = \max_{1 \le l \le n} \max_{k_i^l < m \le k_{i+1}^l} max(|\frac{m}{n} - x_l \xi_{l,m}|, |\frac{m-1}{n} - x_{l+1} \xi_{l,m}|)$$

这就是改进的求二维偏差的公式，它可以把求 $D_n(S_2)$ 的值转换成求 $s$ 个部分的极大值之后再取最大值，并且这 $s$ 个部分在取极大值时是相互独立的。

在计算 OALHS 样本 $\{u_k = (x_k, y_k); 1 \le k \le n\}$ 的偏差时，根据定义可知， $\{U'_k = (Z(x_k), Z(y_k)); 1 \le k \le n\}$ 是一个二维正交表，而设 $\{U_k" = (x_k, z_k = Z(y_k)); 1 \le k \le n\}$, 不失一般性假设， $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_k \le \cdots \le x_n$, 则对于每个 $l(1 \le l \le n)$, 按照增序排列 $z_k(1 \le k \le l)$, 记为 $\xi^z_{l,k_0^l+1} \le \xi^z_{l,k_0^l+2} \le \cdots \le \xi^z_{l,k_s^l}$ 根据上面 $k_i^j(1 \le j \le n, 1 \le i \le s)$ 的定义，可

知：

$$\begin{aligned}
\xi^z_{l,k^l_0+1} &= \xi^z_{l,k^l_0+2} = \cdots = \xi^z_{l,k^l_1} = 0 \\
\xi^z_{l,k^l_1+1} &= \xi^z_{l,k^l_1+2} = \cdots = \xi^z_{l,k^l_2} = 1 \\
\cdots & \quad \cdots \\
\xi^z_{l,k^l_{s-1}+1} &= \xi^z_{l,k^l_{s-1}+2} = \cdots = \xi^z_{l,k^l_s} = s-1
\end{aligned}$$

可见， $k^l_0, k^l_1, \cdots, k^l_{s-1}, k^l_s$ 依赖于 $l$ 的值和正交表的第二列的排列次序。所以给定正交表之后，第一列若按由小到大的次序排列，给定 $l$ 的值，则 $k^l_i$ 即可被确定，而 $d_i$ 的值即可被计算出来，然后根据 $d_i$ 的值计算 $D_n(S_2)$.

对于任意的一个 $i(0 \le i \le s-1)$, 在计算 $d_i$ 时，根据 $Z(x) = i$ 的自变量的不同次序，不会影响余下的满足 $Z(x) \ne i$ 的自变量的排列情况，不会改变 $k^l_j(1 \le l \le n, 0 \le j \le s)$, 也不会改变它们的计算公式。对于它们的计算结果也无影响。对于固定的 $i, Z(x) = i$ 的自变量的所有排列取遍共有 $s!$ 种情况。对于所有的 $i(0 \le i \le s-1), Z(x) = i$ 的自变量的所有排列，交叉组合，则构成满足固定的正交表的所有 OALHS 样本，共计 $(s!)^s$ 个。因此，对于固定正交表，利用本节方法通过计算 $ss!$ 个不同情况，找到的每个 $Z(x) = i(0 \le i \le s-1)$ 的自变量的最好排列，使 $d_i$ 最小，组合在一起。构成样本的第二维数据，这个样本就是由在 $(s!)^s$ 个 OALHS 样本中最好的均匀设计。

## 3　构造二维均匀设计

在寻找最小偏差的均匀设计表时，应当从所有可能的设计表中去挑选，这样的备选设计表很多，穷举所有设计表会使计算量明显增加，造成很大的浪费。因此，本节为了减少计算量，先缩小备选设计的范围。由于 OALHS 样本的点集分散程度好，且具有正交表的均衡可比性质，在这样优良的样本子空间里选出的最优设计表在整个备选设计中也是非常好的，并且理论上也得到了证明。我们就选定 OALHS 样本空间作为我们研究的总体。利用已知的 OALHS 信息选择设计表。

在 OALHS 样本中，寻找最优的均匀设计，在选取设计表时，对设计表第一维加入的从小到大限制。可以使过程简化，对整个过程和结果没有影响。寻找过程如下

一、选定一个正交表，并建立适当的映射函数，通常使用的映射函数为

$$Z(i) = \begin{cases} 0 & i = 1, 2, \cdots, s_1 \\ 1 & i = s_1+1, s_1+2, \cdots, s_2 \\ \cdots & \cdots \\ s-1 & i = s_{s-1}+1, s_{s-1}+2, \cdots, s_s \end{cases}$$

其中 $n = s_s$, 固定设计表的第一列为 $x_i = \frac{i-0.5}{n}, x_{n+1} = 1$.

二、根据正交表和映射函数，求出

$$K = \{k^l_i; i = 0, \cdots, s, l = 1, \cdots, n\}.$$

三、根据矩阵 $K$ 的值和公式

$$d_i = \max_{1 \le l \le n} \max_{k^l_i < m \le k^l_{i+1}} max(|\frac{m}{n} - x_l \xi_{l,m}|, |\frac{m-1}{n} - x_{l+1}\xi_{l,m}|)$$

分别求出 $S_{1,\cdots,s_1},\cdots,S_{s_{s-1}+1,\cdots,s_s}$, 并根据所得的结果，简化矩阵： $S'_{1,\cdots,s_1},\cdots,S'_{s_{s-1}+1,\cdots,s_s}$, 进而分别得： $\{1,\cdots,s_1\};\cdots;\{s_{s-1}+1,\cdots,s_s\}$ 的排列，分别代回原正交表，得到第一个设计表，求出偏差。

四、找出偏差最大值所在的集合对应的 $i$, 并在集合 $i$ 中找到最大值所在的位置。然后在正交表上找到这个位置，把该点前面最邻近的值逐步后移，直到超过该点为止，每移动一次，重复二、三步的操作，在这个过程中找到偏差最大值比原来的值小的情况，用新的设计表代替原设计表，返回第四步的开始。否则把该点后面最邻近的值逐步后移，直到超过该点为止，每移动一次，重复二、三步的操作，在这个过程中找到偏差最大值比原来的值小的情况，用新的设计表代替原设计表，返回第四步的开始。如果整个移动过程中一直没有找到偏差最大值比这个值小的情况，则继续第五步。在正交表的数据移动过程中时刻注意表的正交性，若移动之后，产生的表不是正交表，则终止此方向的移动，设计表取为前面的最好结果，并继续进行下面的运算。

五、找出在寻找过程中的最好的设计表

最后找到的设计表是在所有的 OALHS 样本中均匀性最好的设计表。这种方法有时会遇到重复计算。但是偏差是逐渐减少的，所以这种算法是收敛的，不会遇到死循环的情况。

表 1. 几个均匀设计的例子

| n | 第二列的排列 | 偏差 | 方王表的偏差 |
|---|---|---|---|
| 9 | 1,5,7,9,3,6,2,8,4 | 0.2451 | 0.1574 |
| 16 | 4,8,12,16,1,6,14,9,3,11,7,13,2,15,5,10 | 0.0947 | 0.0986 |
| 25 | 5,10,15,20,25,1,7,13,18,22,3,8,16,12,23,19,4,9,14,24,2,17,6,11,21 | 0.0668 | 0.0756 |

从表 1 可以看出，利用新的方法可以得到更优的均匀设计。

**附录　定理 1 的证明:**

假设 $G_2$ 为二维的非负点集， $S_2=\{u_k=(x_k,y_k);1\le k\le n\}\subset G_2$, 满足条件 $x_1\le x_2\le\cdots\le x_n$, 且令 $x_i=\frac{i-0.5}{n}$, $u_0=(x_0,y_0)=(0,0)$, 及 $u_{n+1}=(x_{n+1},y_{n+1})=(1,1)$. 对于每个 $l(l=0,1,\cdots,n)$, 按照增序排列 $y_i(l=0,1,\cdots,l,n)$, 记为 $0\le\xi_{l,0}\le\xi_{l,0}\le\cdots\le\xi_{l,l}\le\xi_{l,l+1}=1$.

于是

$$\begin{aligned}
&\{|\frac{k}{n}-x_l\xi_{l,k}|;0\le k\le l,0\le l\le n\}\\
=&\{|\frac{k}{n}-x_l\xi_{l,k}|;1\le k\le l,1\le l\le n\}\cup\{|\frac{k}{n}-x_l\xi_{l,k}|;k=0,0\le l\le n\}\\
&\{|\frac{k-1}{n}-x_{l+1}\xi_{l,k+1}|;0\le k\le l,0\le l\le n\}\\
=&\{|\frac{k-1}{n}-x_{l+1}\xi_{l,k}|;1\le k\le l,1\le l\le n\}\cup\{|\frac{k-1}{n}-x_{l+1}\xi_{l,k}|;k=l+1,0\le l\le n\}
\end{aligned}$$

等式两边的元素既没有改变，也没有增减。只不过把一个大集合划分为两个小集合而已。当 $k=0$ 时，对于任意的 $0\le l\le n,\xi_{l,0}=0,|\frac{0}{n}-x_l\xi_{l,0}|=0$. 并且当 $k=l+1$ 时，对于任意的 $0\le l\le n,\xi_{l,l+1}=1,x_{l+1}=\frac{l+0.5}{n},|\frac{k}{n}-x_l\xi_{l,k}|=\frac{1}{2n}$. 于是下面的等式成立，

$$\begin{aligned}
max\{|\frac{k}{n}-x_l\xi_{l,k}|;k=0,0\le l\le n\}&=0\\
max\{|\frac{k-1}{n}-x_{l+1}\xi_{l,k}|;k=l+1,0\le l\le n\}&=\frac{1}{2n}
\end{aligned}$$

并且

$$max\{|\frac{k}{n}-x_l\xi_{l,k}|;1\le l\le n,0\le k\le l\}\ge|\frac{l}{n}-x_l\xi_{l,l}|$$
$$max\{|\frac{k}{n}-x_l\xi_{l,k}|;1\le l\le n,0\le k\le l\}\ge|\frac{1}{2n}+\frac{(1-\xi_{l,l})(l-0.5)}{n}|\ge\frac{1}{2n}$$

因此,

$$\begin{aligned}
&\max_{0\le l\le n}\max_{0\le k\le l} max(|\frac{k}{n}-x_l\xi_{l,k}|,|\frac{k}{n}-x_{l+1}\xi_{l,k+1}|)\\
=\ & max\{|\frac{k}{n}-x_l\xi_{l,k}|,|\frac{k-1}{n}-x_{l+1}\xi_{l,k}|;0\le l\le n,0\le k\le l\}\\
=\ & max\{\{|\frac{k}{n}-x_l\xi_{l,k}|,|\frac{k-1}{n}-x_{l+1}\xi_{l,k}|;1\le l\le n,1\le k\le l\}\\
\cup\ & \{|\frac{k}{n}-x_l\xi_{l,k}|;0\le l\le n,k=0\}\cup\{|\frac{k-1}{n}-x_{l+1}\xi_{l,k}|;0\le l\le n,k=l+1\}\}\\
=\ & max\{|\frac{k}{n}-x_l\xi_{l,k}|,|\frac{k-1}{n}-x_{l+1}\xi_{l,k}|;1\le l\le n,1\le k\le l\}\\
=\ & \max_{1\le l\le n}\max_{1\le k\le l} max(|\frac{k}{n}-x_l\xi_{l,k}|,|\frac{k-1}{n}-x_{l+1}\xi_{l,k}|)
\end{aligned}$$

定理 1 证毕。

## 参 考 文 献


1 Fang, K.T., Shiu, W.C. and Pan, J.X. (1999). Uniform Design Based on Latin Squares. *Statistica Sinica*, **9**, 905-912.

2 Mckay, M.D., Conover, W.J. and Beckman, R.J.(1979). A Comparison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in the Analysis of Output from a Computer Code. *Technometrics*, **21**, 239-245.

3 Owen, A.B.(1992). Orthogonal Arrays for Computer Experiments, Integration and Visualization. *Statistica Sinica*, **2**, 439-452.

4 Sacks, J., Welch, W.J., Mitchell, T.J. and Wynn, M.H. (1989). Design and Analysis of Computer Experiments, *Statistical Science*, **4**, 409-435.

5 Tang, B.X.(1993). OA-Based Latin Hypercube. *JASA*, **88**, 1392-1397.

6 T.Bundschuh, 朱尧辰 (1993). A Method for Exact Calculation of the Discrepancy of Low Dimensional Finite Point Sets. Abh. Math. Sem. Uni. Hamburg, 63, 115-133.

7 方开泰 (1994). 均匀设计与均匀设计表. 科学出版社.

8 方开泰，马长兴 (2001). 正交与均匀试验设计. 科学出版社.

9 王元，方开泰 (1981). 关于均匀分布与试验设计 (数论方法). 科学通报，**26**, 65–70.

10 杨贵军 (1996). 利用 OALHS 构造均匀分布. 硕士论文，南开大学.

11 张润楚，王兆军 (1996). 均匀设计抽样及其优良性质. 应用概率统计，**12**, 337–347.